به نام خدا

Independency

مفهوم استقلال دو پیشامد

دو پیشامد A و B را مستقل از هم می‌گوییم هرگاه رخداد یکی از آنها (مثلی برای رخداد یکی از آنها) هیچ تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد یا به بیان ریاضی، داشته باشیم.

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

پیشامد A و B

مستقل از هم هستند.

$$\Longleftrightarrow \quad A \perp\!\!\!\perp B$$

نماد استقلال

از طرف دیگر با توجه به رابطه‌ی زنجیره‌ای، داریم

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A)$$

$$A \perp\!\!\!\perp B \iff P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

② $A \perp\!\!\!\perp B \iff P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

① $A \perp\!\!\!\perp B \iff P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$

نتیجه ۱ - اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، احتمال اشتراک آنها برابر حاصلضرب احتمال تک تک آنهاست (و برعکس)

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$

نتیجه 2 - دو پیشامد مستقل از هم (با احتمالات غیرصفر) نمی‌توانند جدا از هم باشند

$\Leftarrow$ دو پیشامد مستقل حتماً با هم اشتراک دارند.

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B) \xRightarrow[P(B)\neq 0]{P(A)\neq 0 \text{ و}} P(A\cap B)\neq 0$$

یادآوری : دو پیشامد A و B را جدا از هم می‌گوییم هرگاه رخداد هر دو آنها با هم غیرممکن باشد یعنی

$P(A \cap B) = 0$ یا $A \cap B = \phi$

مفهوم استقلال را می‌توانیم به بیش از دو پیشامد نیز تعمیم دهیم. برای n پیشامد A_1 ، A_2 ، ... ، A_n می‌توان استقلال توام را تعریف کرد. پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ را تواما مستقل می‌گوییم، هرگاه، هر زیرمجموعه به هر تعداد از این پیشامدها انتخاب کنیم مستقل از هم باشند (یعنی به صورت زیرمجموعه‌های دوتایی، زیرمجموعه‌های سه‌تایی و ...)

با بیان ریاضی

$$\forall r \geq 2 \;; \quad P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_r})$$

$r \leq n$, $i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$

یا

به عبارتی ,

$$P\left(\prod_{j=1}^{r} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{r} P(A_{i_j})$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{r} P(A_{i_j})$$

$$\Longleftrightarrow \quad A_1 \perp\!\!\!\perp A_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp A_n$$

(نماد استقلال توام n پیش آمد)

در ارتباط با استقلال پیش آمدها، چند قضیه پرکاربرد مطرح است که در ادامه به بیان آنها می‌پردازیم.

قضیه ۱: اگر دو پیش آمد A و B مستقل از هم باشند، آنگاه دو پیش آمد A و B^c نیز مستقل از هم خواهند بود.

$$A \perp\!\!\!\perp B \implies A \perp\!\!\!\perp B^c$$

اثبات: برای اثبات قضیه می‌توان نشان داد که $P(A|B^c)=P(A)$ و $P(B^c|A)=P(B^c)$

یا می‌توان نشان داد که

$$P(A\cap B^c) = P(A)\,P(B^c)$$

$$A = A\cap(\overbrace{B\cup B^c}^{\Omega}) = \underbrace{\underbrace{(A\cap B)}\cup\underbrace{(A\cap B^c)}}_{\text{جدا از هم}} \implies P(A) = \underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)} + P(A\cap B^c)$$

قضیه ۲. اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، آنگاه پیشامدهای A^c و B^c نیز مستقل از هم هستند.

اثبات: با دو بار استفاده از قضیه‌ی 1 می‌توان اثبات را انجام داد

$$A \perp\!\!\!\perp B \xRightarrow{\text{قضیه } 1} \underbrace{A \perp\!\!\!\perp B^c}_{B^c \perp\!\!\!\perp A} \xRightarrow{\text{قضیه } 1} B^c \perp\!\!\!\perp A^c$$

تمرین: اگر داشته باشیم $A \perp\!\!\!\perp B$ و $A \perp\!\!\!\perp C$، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

1) $A \perp\!\!\!\perp (B \cap C)$

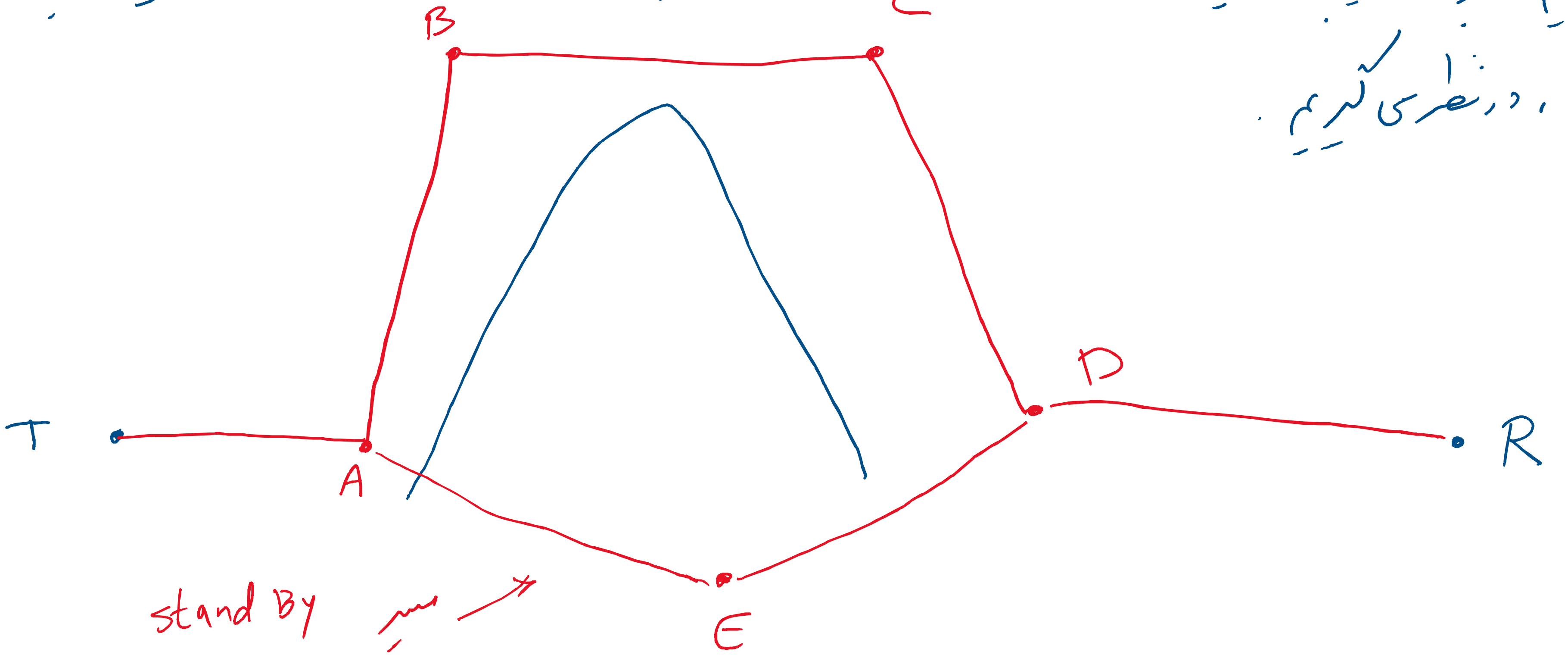
2) $A \perp\!\!\!\perp (B \cup C)$

3) $A \perp\!\!\!\perp (B^c \cap C)$

4) $B \perp\!\!\!\perp C$

5) $A \perp\!\!\!\perp B \perp\!\!\!\perp C$

مثال - می خواهیم بین دو نقطه ی T و R (فرستنده و گیرنده) یک ارتباط مخابراتی قابل اطمینان برقرار کنیم. برای این منظور، سیگنال را از طریق ایستگاه های مخابراتی A و B و C و D از T به R منتقل می کنیم. برای ایجاد اطمینان بالاتر در برقراری ارتباط یک مسیر stand By نیز از طریق ایستگاه مخابراتی E، در نظر می گیریم.



اگر احتمال سالم بودن ایستگاه‌های مخابراتی از یک بازه زمانی به طول T_0 برابر P_0 باشد،
احتمال اینکه لینک بین T و R در بازه زمانی به طول T_0 برقرار باشد، چقدر است؟
پیش آمدهای خرابی ایستگاه‌های مخابراتی مستقل از هم هستند (استقلال توأم)

M = پیش آمد برقرار بودن لینک بین دو نقطه‌ی T و R ≡ (برقرار بودن لینک اصلی یا برقرار بودن لینک stand by)
≡ سالم بودن ایستگاه‌های A, D و ((سالم بودن B, C) یا (سالم بودن E))

$$\Rightarrow P(M) = P\{A \cap D \cap ((B \cap C) \cup E)\} = P\{(A \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap E \cap D)\}$$

$$\Rightarrow P(M) = P(A \cap D)\, P((B \cap C) \cup E)$$

$$= P(A)\, P(B) \left[\underbrace{P(B \cap C)}_{P(B)P(C)} + P(E) - \underbrace{P(B \cap C \cap E)}_{P(B)P(C)P(E)} \right]$$

$$= P_0\, P_0 \left[P_0 P_0 + P_0 - P_0 P_0 P_0 \right]$$

$$\Rightarrow P(M) = P_0^3 \left(1 + P_0 - P_0^2 \right)$$

به عنوان مثال، اگر یک تاس را دو بار پرتاب کنیم، داریم:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega_2 = \Omega \times \Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, \ldots, (6,6)\}$$

$$|\Omega| = 6 \implies |\Omega_2| = 6^2 = 36$$

یا اگر یک سکه را سه بار پرتاب کنیم، داریم

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$\Omega_3 = \Omega \times \Omega \times \Omega = \{ (H, H, H), \dots\dots, (T, T, T) \}$$

(نتیجه آزمایش اول) (نتیجه آزمایش دوم) (نتیجه آزمایش سوم)

$$|\Omega| = 2 \Rightarrow |\Omega_3| = 2^3 = 8$$

در این بخش می‌خواهیم احتمال پیشامدهایی که در ارتباط با آزمایش‌های تصادفی تکراری تعریف می‌شوند را به دست بیاوریم. در این راستا، به این نکته توجه می‌کنیم که این آزمایش‌های تصادفی به صورت مستقل و در شرایط یکسان تکراری شوند.

(استقلال پیشامدها (استقلال توأم))

مثال - فرض می‌کنیم سکه‌ای داریم که احتمال شیر آمدن در $\underbrace{\text{آن}}_{\text{هر بار پرتاب}}$ برابر P باشد.

$$P_r\{H\} = P \longrightarrow P_r\{T\} = 1-P$$

این سکه را 5 بار پرتاب می‌کنیم. احتمال پیش‌آمدهای زیر را به دست بیاورید.

1- پیش‌آمد اینکه دو بار اول شیر بیاید و سه بار بعدی خط بیاید. پیش‌آمد A

2- پیش‌آمد اینکه دو بار شیر بیاید. پیش‌آمد B

$$\Omega = \{H, T\} \xrightarrow[\text{مستقل آزمایش}]{\text{۵ بار تکرار}} \Omega_5 = \Omega^5 = \{(H,H,H,H,H), \dots, (T,T,T,T,T)\}$$

$$|\Omega_5| = 2^5 = 32$$

$$A = \{(H, H, T, T, T)\}$$

آزمایش اول — آزمایش دوم — آزمایش پنجم

A = { (بار اول شیر) ∩ (بار دوم شیر) ∩ (بار سوم خط) ∩ (بار چهارم خط) ∩ (بار پنجم خط) }

$$\Longrightarrow P(A) \underset{\text{استقلال}}{=} P \times P \times (1-P) \times (1-P) \times (1-P) = P^2 (1-P)^3$$

$$P(B) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$$

B : پیش آمد اینکه دوبار شیر بیاید (ترتیب مهم نیست)

$p^2(1-p)^3$ $p^2(1-p)^3$ $p^2(1-p)^3$

{ آزمایش اول و دوم شیر، بقیه خط یا آزمایش دوم و سوم شیر، بقیه خط یا ... آزمایش چهارم و پنجم شیر بقیه خط }

= (تعداد حالت هایی که دو بار شیر بیاید) (احتمال اینکه با یک ترتیب خاص شیر بیاید)

$$= \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$$

(— , — , — , — , —)

تعداد نحوه ی چینش 2 تا H و 3 تا T در این 5 مکان = $\binom{5}{2}$

این گونه آزمایشها، تحت عنوان آزمایش های برنولی فرمول بندی می شوند.

★ آزمایشهای برنولی Bernolli Trials

در آزمایش برنولی، آزمایشهایی مدنظر هستند که نتیجه ی آنها دو حالت ممکن بیشتر ندارد. به عنوان مثال قطع و وصل بودن یک کلید در یک مدار الکتریکی یا مثبت و منفی بودن یک عدد حقیقی غیر صفر.

به طور کلی در آزمایش برنولی می توانیم یک پیش آمد مورد نظر A را با احتمال P داشته باشیم و رخداد یا عدم رخداد پیش آمد A (یعنی پیش آمد A و A^c) را مد نظر قرار دهیم.

$$P(A) = P \implies P(A^c) = 1-P$$

در این صورت احتمال اینکه در n بار تکرار مستقل آزمایش تصادفی، پیش آمد A به تعداد k بار و به ترتیب مشخص رخ دهد، برابر است با

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

و احتمال اینکه در n بار تکرار مستقل آزمایش تصادفی، پیش آمد A به تعداد k بار رخ دهد (با هر ترتیبی - ترتیب مهم نیست) برابر است با

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \triangleq P_n(k)$$